

Chapitre 1 Equations différentielles. $\frac{1}{2}$.
linéaires du 1^{er} et 2^{ème} ordre.

Complément: Des cas d'équations différentielles non linéaires du 1^{er} ordre.

Dans tout le chapitre, le terme "intervalle" désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

On note $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I - Equations différentielles linéaires
du premier ordre

I.1. Généralités

Définition 1. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $\alpha, \beta, \gamma: I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues, J un intervalle de \mathbb{R} tel que $J \subset I$ et $y: J \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

On dit que y est une solution sur J de l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) \quad \alpha y' + \beta y = \gamma$$

si et seulement si

y est dérivable sur J

$$\forall x \in J, \quad \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x).$$

On note S_y l'ensemble des solutions de (E) sur J .

Remarques

1°/ On suppose souvent que J est ouvert.

2°/ Si $K = \mathbb{R}$ on appelle courbes intégrales de (E)

les courbes représentatives des solutions de (E).

~~3°/ Si $\alpha \equiv 1$ et $\beta \equiv 0$, la résolution de (E) revient au calcul des primitives de γ sur I .~~

Notre but, dans le cas général, d'exprimer les solutions de (e) à l'aide des primitives et de calculer celles-ci, quand c'est possible.

définition 2 L'éq. diff. $\alpha y' + \beta y = \delta$ est dite normalisée (ou résolue en y') si et seulement si $\alpha \equiv 1$.

Problème des raccords

Lorsque (e) n'est pas normalisée, on se ramène à une équation normalisée en divisant par la fonction α sur tout intervalle où α ne s'annule pas. Puis "Colle" les solutions en les points où α s'annule.

Exemple - illustration: Raccordement de clause C'
Supposons $I = \mathbb{R}$ et α s'annule en un seul point noté x_0 .

Une application $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est solution de (e) sur \mathbb{R} si et seulement si :

- La restriction $y_1 \hat{=} y$ sur $] -\infty, x_0[$ est solution de (e) sur $] -\infty, x_0[$.
- La restriction $y_2 \hat{=} y$ sur $] x_0, +\infty[$ est solution de (e) sur $] x_0, +\infty[$.
- y_1 admet une limite finie l_1 en x_0^- et y_2 admet une limite finie l_2 en x_0^+ avec $l_1 = l_2$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{y_1(x) - l_1}{x - x_0} = l_1'$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{y_2(x) - l_2}{x - x_0} = l_2'$ avec $l_1' = l_2'$.

$$\text{et } \alpha(x_0) l_1' + \beta(x_0) l_1 = \delta(x_0).$$

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre résolue normalisée

$$(E) \quad y' + a \cdot y = b.$$

où $a, b: I \rightarrow \mathbb{K}$ continues.

$$\text{On note } (E_0) \quad y' + ay = 0,$$

et d'une équation sans 2^e Cond membre associée à (E)
notée (E.S.S.M)

I.2. Résolution de l'équation sans 2^e Cond membre

Quelques notations. I intervalle de \mathbb{R} .

$a: I \rightarrow \mathbb{K}$ une application continue.

(E₀) $y' + ay = 0$, $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ est l'inconnue.

$$S_0 = \left\{ y: I \rightarrow \mathbb{K} \text{ avec } \begin{array}{l} y \text{ dérivable sur } I \\ \text{et} \\ y' + ay = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{l'ensemble des} \\ \text{solutions de (E}_0 \text{) sur } I. \end{array} \right.$$

solutions de (E₀) sur I .

Proposition. S_0 est \mathbb{K} -espace vectoriel

Preuve S_0 est un ~~est~~ \mathbb{K} -espace vectoriel du \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^I formé des applications de I dans \mathbb{K} .

* $S_0 \neq \emptyset$ Car l'application nulle est solution de (E₀) noté 0

* Soient $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors: $\lambda y_1 + y_2 \in S_0$.

- $\lambda y_1 + y_2$ est dérivable sur I .

$$- (\lambda y_1 + y_2)' + a(\lambda y_1 + y_2) = \lambda \underbrace{(y_1' + ay_1)}_{=0} + \underbrace{(y_2' + ay_2)}_{=0} = 0.$$

($y_1 \in S_0$) ($y_2 \in S_0$)

Ponc. $\lambda y_1 + y_2 \in S_0$.

Théorème 1 $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} - \int a(x) dx ; \lambda \in \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda e \end{array} \right\}$

ou $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} - A(x) \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } A(x) \text{ est une} \\ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \text{ primitive de } a(x) \text{ sur } I \end{array} \right\}.$

Démonstration.

a est continue, donc admet des primitives.

Soit $A, t, q.$ $\forall x \in I$ $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ $x_0 \in I$

$$y' + ay = 0 \Leftrightarrow (y' + ay)e^A = 0 \Leftrightarrow (ye^A)' = 0$$

$$\Leftrightarrow ye^A = \lambda, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, y = \lambda e^{-A}$$

$$(ye^A)' = y'e^A + y(e^A)'$$

$$= A'e^A$$

$$= ae^A$$

Remarque: la méthode suivante est fautive.

$$y' + ay = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a \Leftrightarrow \ln|y| = -A + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow |y| = \lambda e^{-A}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

$$\Leftrightarrow y = \lambda e^{-A}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

• y peut a priori s'annuler en certains points de I .

Exemples

1°) Résoudre $y' + y = 0$ (où $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

$$S_0 = \left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. x \mapsto \lambda e^{-x} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2°) Résoudre $y' - e^{x^2} y = 0$ ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

$$S_0 = \left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. x \mapsto \lambda e^{E(x)} \right\} \quad \text{où } E(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

2°) ou mode opératoire

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre et sans second membre, sur un intervalle I (ouvert) de \mathbb{R} , on commence par normaliser l'équation, puis sur chaque intervalle où le coefficient de y' est non nul, on applique le théorème précédent. Et à la fin, on étudie les raccords aux points où le coefficient de y' est nul.

I-3. Résolution de l'équation avec 1^{er} membre

Notations

I intervalle de \mathbb{R} , $a, b: I \rightarrow \mathbb{K}$ applications continues.

$$(E) \quad y' + ay = b.$$

S l'ensemble des solutions de (E) sur I

$$(E_0) \quad y' + ay = 0$$

" " (E_0) sur I .

S_0 " "

a- Relation entre S et S_0

i/ $\forall y_1, y_2 \in S$, on a $y_1 - y_2 \in S_0$

en effet $(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = y_1' + ay_1 - (y_2' + ay_2) = b - b = 0$.

ii/ $\forall y_1 \in S \quad \forall y_0 \in S_0$, alors $y_1 + y_0 \in S$

en effet $(y_1 + y_0)' + a(y_1 + y_0) = \underbrace{y_1' + ay_1}_b + \underbrace{y_0' + ay_0}_0 = b + 0 = b$.

D'après ces deux résultats, si $S \neq \emptyset$, S est une droite affine dont la direction est la droite vectorielle S_0 . En effet, $\forall y_1 \in S$:

$$S = \{y_1 + y_0; y_0 \in S_0\}.$$

Ainsi, une solution de (E) est la somme de deux solutions.

- Une solution dite particulière de (E) .

* Une solution de (E_0) .

b- Résolution de (E)

~~Soit~~ Soit A une primitive de a sur I et

$$e^A: I \rightarrow \mathbb{K} \quad A(x) \\ x \mapsto e$$

soit y une application dérivable de I vers \mathbb{R} .
alors

$$y' + ay = b \Leftrightarrow (y' + ay)e^A = be^A$$

$$\Leftrightarrow (ye^A)' = be^A$$

Or be^A est continue sur I , donc admet une primitive sur I , soit B une primitive de be^A

donc

$$y' + ay = b \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, ye^A = B + \lambda$$

$$\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K}, y = Be^{-A} + \lambda e^{-A})$$

théorème 2

1°/ Les solutions générales de (E) sur I sont la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0) .

2°/ Une solution particulière de (E) est Be^{-A} où

i/ A est une primitive de a sur I

ii/ B est une primitive de be^A sur I .

c/ Méthode pratique de résolution de (E)

On résout d'abord (E_0) . On détermine après une solution particulière de (E) de la façon suivante :

i/ Il se peut que (E) admette une solution évidente. Par exemple si $(E): y' + y \cdot e^x = e^x$
une solution évidente est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 1$

ii/ Si le second membre b de (E) s'écrit $b = \sum_{k=1}^n b_k$,
on pourra déterminer pour chaque équation
 $(E_k) y' + ay = b_k$ une solution particulière y_k , et par suite $\sum_{k=1}^n y_k$ est une solution particulière de (E) . Car

$$\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)' + a \left(\sum_{k=1}^n y_k\right) = \sum_{k=1}^n (y_k' + a y_k) = \sum_{k=1}^n b_k = b.$$

Cette propriété s'appelle le principe de superposition des solutions.

iii) Méthode de variation de la constante

Soit y_0 une solution particulière non nulle de (E_0) . On cherche une solution y de (E) sous la forme $y = \lambda y_0$ où $\lambda: I \rightarrow \mathbb{K}$ fonction inconnue (dérivable sur I).
On a : $y' + ay = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 + \lambda y_0' + \lambda a y_0 = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 = b$
($y_0' + a y_0 = 0$)

Or $y_0(x) \neq 0 \forall x \in I$, alors $\lambda' = \frac{b}{y_0} \Rightarrow \lambda = \int \frac{b(x)}{y_0(x)} dx$.

d) Exemples

1°) $(E) \quad y' + xy = x; \quad (y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$
La solution générale de l'équation pour second membre (E_0) est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution (évidente) de (E) est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 1$.

Donc $S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

2°) $(E) \quad y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x, \quad (y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$
La solution générale de l'équation pour second membre est $y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

D'après le principe de superposition des solutions, nous cherchons une solution particulière pour chacune des deux équations

$$(E_1) \quad y' + y = 2e^x$$

$$(E_2) \quad y' + y = 4\sin x + 3\cos x$$

une solution particulière de (E_1) :

une solution particulière de (E_2) sera de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_2(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{on a } \forall x \in \mathbb{R}, y_2'(x) + y_2(x) = 4 \sin x + 3 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (-\beta + \alpha) \sin x + (\alpha + \beta) \cos x = 4 \sin x + 3 \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\beta + \alpha = 4 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{7}{2}, \beta = -\frac{1}{2} \right)$$

on déduit alors une solution particulière de E :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{7}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin } S = \left\{ \begin{aligned} &\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto e^x + \frac{7}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\}.$$

$$3^\circ (E) \quad y' + \frac{x}{x^2+1} y = \frac{1}{x^2+1}, \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

La solution générale de l'équation sans second

$$\begin{aligned} \text{membre est : } x &\mapsto \lambda e^{-\int \frac{x}{1+x^2} dx} = \lambda e^{-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}, \lambda \in \mathbb{R}. \\ &= \lambda y_0(x) \end{aligned}$$

Pour déterminer une solution particulière de (E) ,

on appliquera la méthode de la variation de la constante. On cherchera une solution y de (E)

de la forme $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ où $y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

~~soit~~ $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ étant une inconnue (supposée dérivable).

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \lambda(x) y_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

- 38 -

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\text{et } \gamma(x) = \lambda(x) \gamma_0(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Enfin } S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}; \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

e. Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale.

Théorème 3 Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $a, b: I \rightarrow \mathbb{K}$ deux applications continues, (E) $y' + ay = b$, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$
 Il existe une solution et une seule y de (E) sur I telle que $y(x_0) = y_0$.

Preuve: D'après le théorème 2, la solution générale de (E) sur I est

$$y = B e^{-A} + \lambda e^{-A}, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

$$\text{Alors } y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow B(x_0) e^{-A(x_0)} + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0.$$

$$\Leftrightarrow \lambda = y_0 e^{A(x_0)} - B(x_0).$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de λ , donc de y .

f. Problème des raccords.

On considère l'équation différentielle non normalisée

$$(e) \quad \alpha y' + \beta y = \gamma$$

et supposons que α s'annule en un et un seul point x_0 et $x_0 \in I$.

On résout (e) sur chacun des deux intervalles $I_1 =]-\infty, x_0[\cap I$ et $I_2 =]x_0, +\infty[\cap I$ (sur I_1 et I_2 , (e) peut être normalisée) puis on cherche si on peut "raccorder" au point x_0 les solutions de (e) sur I_1 et I_2 .

(e) $2x(1+x)y' + (1+x)y = 1$
 sur tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} (y est à image dans \mathbb{R})
 On résoudra l'équation normalisée

$$(E) \quad y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1+x)}$$

On étudiera les racines en -1 et 0 .

1/ Résolution de (E).

Supposons $-1 \notin I$ et $0 \notin I$.

La solution générale de (E₀) $y' + \frac{1}{2x}y = 0$ sur I

est $I \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{1}{2x} dx} = \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}}; \lambda \in \mathbb{R}. \quad y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

Pour déterminer une solution particulière de (E), on utilisera la méthode de la variation de la constante.

En posant $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$ et injectant dans (E),

on obtient $(E) \Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x)y_0(x) = \frac{1}{2x(1+x)}$

Posons $\varepsilon = \text{sgn } x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On a.

$$\lambda(x) = \int \frac{\sqrt{|x|}}{2x(1+x)} dx = \int \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1+x)} dx. \quad \text{Alors } \begin{cases} \text{on pose} \\ u = \sqrt{\varepsilon x} \end{cases}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \text{Arctan } \sqrt{x} & \text{si } \varepsilon = 1 \text{ (c.à.d. } I \subset]0, +\infty[) \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| & \text{si } \varepsilon = -1 \text{ (c.à.d. } I \subset]-\infty, 0[) \end{cases}$$

On a alors $S = \begin{cases} \left\{ x \mapsto \frac{\text{Arctan } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } I \subset]0, +\infty[\\ \left\{ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } I \subset]-\infty, 0[\text{ (et } -1 \notin I) \end{cases}$

Q) Raccords

a) Raccord en 0. On suppose que $0 \in I$ et $-1 \notin I$

• $y_1(x)$ admet une limite finie en 0^+ ssi $\lambda = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_1(x) = 1$.

• $y_2(x)$ admet une limite finie en 0^- ssi $\mu = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_2(x) = 1$.

Ainsi, il y a raccord par continuité en 0ssi $\lambda = \mu = 0$
et la solution est alors

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Etudions maintenant la dérivabilité de y en 0.
~~Pour~~ le calcul des limites se fait à l'aide des D.L.

Pour $x > 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{3}$.

Pour $x < 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x\sqrt{-x}} \left(\ln \left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right) - 2\sqrt{-x} \right) = -\frac{1}{3}$.

y est dérivable en 0 et $y'(0) = -\frac{1}{3}$.

Pour $x = 0$, $y(0) = 1$ et ça vérifie

$$x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = 1$$

Donc $S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| & \text{si } x < 0 \end{cases} \right\}$.

b) Raccord en -1. Pour que le raccord en -1 soit possible, il faut que la "solution" vérifie (e) en -1 .

$$2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = +1. \text{ On aurait } 0 = 1.$$

Ce qui n'est pas possible.

Mode opératoire.

1/ Normalisation

2/ Résolution sur les différents intervalles

3/ Etude des raccords.

I. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle - polynôme

II.1 Généralités

On appelle exponentielle - polynôme toute application de la forme
$$x \mapsto \sum_{k=1}^n e^{m_k x} P_k(x),$$
 avec I intervalle de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}^*$, $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$

Définition Soient I intervalle de \mathbb{R} , $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$, $h: I \rightarrow \mathbb{K}$ une exponentielle polynôme, J intervalle de $\mathbb{R} + \mathbb{R}$, $J \subset I$, $y: J \rightarrow \mathbb{K}$ application.

y est dite une solution sur J de

$$(e) \quad \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = h$$

si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} y \text{ est 2 fois dérivable sur } J \\ \forall x \in J, \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = h(x) \end{array} \right.$

Résoudre (e), c'est déterminer tous les couples (J, y) où J intervalle de \mathbb{R} , $J \subset I$ et y une solution sur J de (e).

On suppose $\alpha \neq 0$ (sinon (e) est une eq. diff. du 1^{er} ordre).
linéaire

L'équation (e) est équivalente à

$$(E) \quad y'' + a y' + b y = g \quad \text{où } a = \frac{\beta}{\alpha}, \quad b = \frac{\gamma}{\alpha} \text{ et } g = \frac{h}{\alpha}.$$

L'équation sans second membre associée à (E) est

$$(E_0) \quad y'' + a y' + b y = 0$$

II.2. Résolution de l'équation sans second membre

Notations: I intervalle de \mathbb{R} ; $a, b \in \mathbb{K}$

(E₀) $y'' + a y' + b y = 0$, $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ fonction inconnue supposée 2 fois dérivable

S_0 l'ensemble des solutions de (E₀) sur I .

1°/ Proposition S_0 est un \mathbb{K} -espace vectoriel

Preuve . $S_0 \neq \emptyset$, l'application "nulle" est solution de (E₀)

• Soient $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$\lambda y_1 + y_2$ est 2 fois dérivable sur I

$$\forall (\lambda y_1 + y_2)'' + a(\lambda y_1 + y_2)' + b(\lambda y_1 + y_2)$$

$$= \lambda (\underbrace{y_1'' + a y_1' + b y_1}_{=0}) + (\underbrace{y_2'' + a y_2' + b y_2}_{=0}) = 0$$

$\lambda y_1 + y_2 \in S_0$

2°/ Résolution de (E₀)

On va chercher d'éventuelles solutions de (E₀) de la forme $R(x) = e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{K}$. On a

$$\forall x \in I \quad (R'' + aR' + bR)(x) = (r^2 + ar + b)e^{rx}$$

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée équation caractéristique de (E₀), soit $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant

a/ ~~On suppose que Δ est strictement positif~~
On suppose que l'équation caractéristique de (E₀) admet au moins une solution notée p ($p \in \mathbb{K}$).

L'application $R : I \rightarrow \mathbb{K}$ $x \mapsto e^{px}$ est une solution de (E₀) sur I .

On pose $\forall x \in I$, $z(x) = y(x)e^{-px}$
 z est 2 fois dérivable sur I . On a alors

$$y(x) = z(x)e^{px}, \quad y'(x) = p z(x)e^{px} + z'(x)e^{px}$$

$$y''(x) = p^2 z(x)e^{px} + 2p z'(x)e^{px} + z''(x)e^{px}$$

$$\text{d'où} \quad (y'' + ay' + by)(x) = \underbrace{(p^2 + ap + b)}_{=0} z(x)e^{px} + (2p + a)z'(x)e^{px} + z''(x)e^{px}$$

(E₀) $\Leftrightarrow (2p + a)z' + z'' = 0$ équation linéaire du 1^{er} degré en z'

dont la solution générale est donnée par

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \lambda e^{-(2p+a)x}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

i) $2p+a \neq 0$, alors $\forall x \in I$, $z(x) = -\frac{\lambda}{2p+a} e^{-\frac{(2p+a)x}{2}} + \lambda_2$, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$.
 Ainsi, en notant $\lambda_1 = -\frac{\lambda}{2p+a}$, la solution générale de (E_0) est alors

$$y : I \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{-(p+a)x} + \lambda_2 e^{px}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}.$$

$-(p+a)$ étant l'autre solution de l'éq. caractéristique. En note $r_1 = -(p+a)$, $r_2 = p$, on obtient alors

$$S_0 = \left\{ I \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \right\}.$$

ii) $2p+a=0$ (c'est à dire que p est une solution double de l'éq. caractéristique)

alors : $\forall x \in I$, $z(x) = \lambda x + \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$ et alors

$$S_0 = \left\{ I \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-\frac{a}{2}x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

d) Si l'équation caractéristique de (E_0) n'admet pas de solution dans \mathbb{K} (c'est à dire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$).

L'éq. caractéristique admet 2 racines dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et on

cherche une solution $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ 2 fois dérivable sur I avec $\gamma'' + a\gamma' + b\gamma = 0$ et on ne conserve que les solutions à valeurs réelles.

$$\text{On a } \forall x \in I \quad \gamma(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} \\ r_2 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \bar{r}_1 \end{array} \right.$$

$$\gamma(I) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in I, \quad \overline{\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}} = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad \bar{\lambda}_1 e^{\bar{r}_1 x} + \bar{\lambda}_2 e^{\bar{r}_2 x} = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

$$\Rightarrow \forall x \in I, (\bar{\lambda}_2 - \lambda_1) e^{r_1 x} = (\lambda_2 - \bar{\lambda}_1) e^{r_2 x}$$

$$\Rightarrow \forall x \in I, \quad \bar{\lambda}_2 - \lambda_1 = (\lambda_2 - \bar{\lambda}_1) e^{i\sqrt{-\Delta}x}.$$

$$\Rightarrow \bar{\lambda}_2 - \lambda_1 = \lambda_2 - \bar{\lambda}_1 = 0$$

$\{1, e^{i\sqrt{-\Delta}x}\}$ est une \mathbb{K} -famille libre.

Parsuite $\gamma(I) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$.

$$S_0 = \left\{ I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \bar{\lambda}_1 e^{\bar{r}_1 x}, \quad \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

En posant $\lambda_1 = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in I$

$$\lambda_1 e^{r_1 x} + \bar{\lambda}_1 e^{\bar{r}_1 x} = 2e^{-\frac{a}{2}x} \left[u \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) - v \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) \right]$$

et par suite

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{a}{2}x} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) \right], A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Théorème 4 L'ensemble des solutions de (E_0) sur I est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2.

Soient $r^2 + ar + b = 0$ d'équation caractéristique associée à (E_0) et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant.

1^{er} cas $r^2 + ar + b = 0$ admet dans \mathbb{K} deux racines r_1 et r_2 distinctes
 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta \geq 0$) ou ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$) Alors $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$

2^{ème} cas $r^2 + ar + b = 0$ admet dans \mathbb{K} une racine double $r = -\frac{a}{2}$
 (c.à.d. $\Delta = 0$) Alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-\frac{a}{2}x}, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$$

3^{ème} cas $r^2 + ar + b = 0$ n'admet aucune solution dans \mathbb{K}
 (c'est à dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$) Alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 \operatorname{Re}(\lambda_1 e^{r_1 x}), \lambda_1 \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

r_1 est une racine dans \mathbb{C} de $r^2 + ar + b$.

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{a}{2}x} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) \right], A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Exemples

A) Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$ ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

L'éq. caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet 2 solutions distinctes : 2 et 3. Donc :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2°) l'équation caractéristique $r^2 + w^2 = 0$ admet deux solutions complexes non réelles : iw et $-iw$. Alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A \cos wx + B \sin wx ; A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

3°) Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$ ($y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double : 2. Alors.

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{2x} , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

4°) Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = 0$ ($y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$)

On obtient alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{2x} , \lambda, \mu \in \mathbb{C} \end{array} \right\}.$$

II. 3 Résolution de l'équation avec 1^{er} membre exponentielle - polynôme.

Notations : I intervalle de \mathbb{R} , $a, b \in \mathbb{R}$,

$g : I \rightarrow \mathbb{K}$ une exponentielle - polynôme

(E) $y'' + ay' + by = g$ où $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ inconnue supposée 2 fois dérivable.

S l'ensemble des solutions de (E) sur I .

1) Liens entre S et S_0

a) $\forall y_1, y_2 \in S$, on a $y_1 - y_2 \in S_0$

b) $\forall y_1 \in S$, $\forall y_0 \in S_0$, alors $y_1 + y_0 \in S$.

Ceci implique que pour tout $y_1 \in S$:

$$S = \{ y_1 + y_0 ; y_0 \in S_0 \}$$

La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E₀)

2/ Principe de superposition des solutions

On a $\forall x \in I$ $g(x) = \sum_{k=1}^n e^{m_k x} P_k(x)$ $n \in \mathbb{N}^*$
 on note $g_k(x) = e^{m_k x} P_k(x)$ $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{K}$
 $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[x]$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$, soit y_k une solution de

$$(E_k) \quad y'' + ay' + by(x) = e^{m_k x} P_k(x) \quad x \in I.$$

Alors $\sum_{k=1}^n y_k$ est une solution de (E)

3/ Détermination d'une solution de

$$(E_k) \quad y'' + ay' + by = g_k.$$

Posons $z(x) = y(x) e^{-m_k x}$, $x \in I \Leftrightarrow y(x) = e^{m_k x} z(x)$.

On a alors :

y est solution de (E_k) sur I si et seulement si

z est solution sur I de

$$(F_k) \quad (m_k^2 + a m_k + b) z(x) + (2 m_k + a) z'(x) + z''(x) = P_k(x)$$

Théorème : Recherche d'une solution particulière de (E)

Pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe une solution

y_k de (E_k) de la forme $y_k : I \rightarrow \mathbb{K}$
 $x \mapsto e^{m_k x} Q_k(x)$

où Q_k est un polynôme de degré :

1°) $\deg(P_k)$ si m_k n'est pas solution de $r^2 + ar + b = 0$.

2°) $1 + \deg(P_k)$ si m_k est solution simple de $r^2 + ar + b = 0$

3°) $2 + \deg(P_k)$ si m_k est solution double de $r^2 + ar + b = 0$.

Une solution de (E) est alors $\sum_{k=1}^n y_k$.

Remarque : Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et g est de type

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto P(x) \cos mx + Q(x) \sin mx, \quad m \in \mathbb{R}^*$$

$P, Q \in \mathbb{R}[x]$, il existe une solution y de (E)

de la forme $y: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto A(x) \cos mx + B(x) \sin mx$$

où $A, B \in \mathbb{R}[x]$ de degré $\leq a$:

+ $\text{Max}(\deg P, \deg Q)$ si im n'est pas solution de $r^2 + ar + b = 0$.

+ $1 + \text{Max}(\deg P, \deg Q)$ si im est solution simple de $r^2 + ar + b = 0$.

Exemples

1°/ Résolvez $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x$ ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double : 2. La solution générale de (E)

est alors $y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Du fait que 1 n'est pas solution de $r^2 - 4r + 4 = 0$,

une solution particulière de (E) notée y_1

sera de la forme $y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto Q(x)e^x$ où $\deg Q = 2$.

On pose $Q = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, α, β, γ à déterminer

$\forall x \in \mathbb{R}, y_1(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x$ est solution de (E)

si et seulement si

$$\begin{aligned} & [(\alpha x^2 + (\beta - 4\alpha)x + (\gamma - 2\beta + 2\alpha))]e^x = (x^2 + 1)e^x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 4\alpha = 0 \\ \gamma - 2\beta + 2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 7 \end{cases} \text{ Dmc } y_1(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x \\ & \text{est solution de (E)} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ x \mapsto (x^2 + 4x + 7)e^x + (\lambda x + \mu)e^{2x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

2°/ Résolvez $y'' + y = \cos^3 x$ ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \quad (\text{linéarisation})$$

On va utiliser le principe de superposition des solutions.

La solution générale de (E_0) est de la forme

i) $\frac{3}{4} \cos x = g_1(x)$ $y_0(x) = A \cos x + B \sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Puisque i est solution de l'équation caractéristique
il existe une solution y_1 de

$$(E_1) \quad y'' + y = \frac{3}{4} \cos x$$

de la forme $y_1(x) = (\alpha x + \beta) \cos x + (\gamma x + \delta) \sin x$.

α, β, γ et $\delta \in \mathbb{R}$ (à trouver); qu'on injecte dans (E_1)

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, 2\gamma \cos x - 2\alpha \sin x = \frac{3}{4} \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Une solution de (E_1) est alors $y_1(x) = \frac{3}{8} x \sin x$

ii) $\frac{1}{4} \cos 3x = g_2(x)$. Du fait que $3i$ n'est pas solution de $r^2 + 1 = 0$, il existe une solution y_2 de \mathbb{E}

$$(E_2) \quad y'' + y = \frac{1}{4} \cos 3x \text{ de la forme}$$

$$y_2(x) = u \cos 3x + v \sin 3x, \quad u, v \in \mathbb{R} \text{ qu'on injecte}$$

dans (E_2) pour récupérer

$$\forall x \in \mathbb{R}, -8u \cos 3x - 8v \sin 3x = \frac{1}{4} \cos 3x \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{32} \\ v = 0 \end{cases}$$

Une solution de (E_2) est alors $y_2(x) = -\frac{1}{32} \cos 3x$.

L'ensemble des solutions de (E) est alors

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3}{8} x \sin x - \frac{1}{32} \cos 3x + A \cos x + B \sin x, \\ A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

II.2 Complément : exemples d'études d'équations différentielles non linéaires du 1^{er} ordre

II-1 Généralités

Defin. Soient $U \subset \mathbb{R}^3$, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ une application, I intervalle de \mathbb{R} . On appelle solution sur I de l'équation différentielle.

$$(e) \quad F(x, y, y') = 0$$

toute application $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que y est dérivable sur I

$$\forall x \in I; (x, y(x), y'(x)) \in U$$

$$\forall x \in I \quad F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

Résoudre (e), c'est déterminer tous les couples (I, y) où I intervalle de \mathbb{R} et y solution sur I de (e).
On appelle courbes intégrales de (e) les courbes représentatives de solutions de (e).

Il est souvent utile, si c'est possible, d'exprimer, dans (e), y' en fonction de x et y . Donc se ramener à

$$(E) \quad y' = f(x, y) \quad \text{où } f: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } V \subset \mathbb{R}^2.$$

Exemples

1) (e) $(1+x^2)y' - xy^2 + 1 = 0 \Rightarrow (E) \quad y' - \frac{x}{1+x^2}y^2 + \frac{1}{1+x^2} = 0$

2) (e) $(1-x^2)y' - \sin y + x = 0$ se ramène à (E) $y' = \frac{\sin y - x}{1-x^2}$

et étudier les racords en -1 et 1 .

3) (e) $yy'^2 - \sin y' + x^2 + 1 = 0$ ne se ramène pas simplement à une équation normalisée.

On se limitera à l'étude de quelques types d'équations différentielles non linéaires du 1^{er} ordre.

III.2 Equations différentielles à variables séparables

Il s'agit de (e) $a(x) + b(y)y' = 0$, où a, b des applications continues sur des intervalles à préciser.

Méthode de résolution

Soient A, B des primitives de a et b .

Pour qu'une application $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable soit solution de (e) sur $I \Leftrightarrow$ l'application

$$I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A(x) + B(y(x))$$

soit constante. On obtient alors

l'éq. différentielle des courbes intégrales :

$$A(x) + B(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Souvent, il ne sera pas possible d'exprimer y en fonction de x explicitement.

Exemple (e) $(1+x^2)y' - (1+y^2) = 0$

$$(e) \Leftrightarrow \frac{y'}{1+y^2} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} x + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$C \in]-\pi, \pi[.$$

$$\text{Si } C \neq -\frac{\pi}{2} \text{ et } C \neq \frac{\pi}{2}, \text{ alors } y = \tan(\operatorname{Arctan} x + C) \\ = \frac{x + \lambda}{1 - \lambda x} \quad \text{avec } \lambda = \tan C \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\text{Si } C = \frac{\pi}{2}, \text{ alors } x < 0 \text{ et } \operatorname{Arctan} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(-x) \\ = \operatorname{Arctan} \frac{1}{-x}$$

$$\text{Donc } y = -\frac{1}{x}$$

De même si $C = -\frac{\pi}{2}$ alors $x > 0$ et $y = -\frac{1}{x}$.

On a trois familles de solutions de (e)

$$a) \quad y(x) = \frac{x + \lambda}{1 - \lambda x} \quad \lambda \neq 0 \text{ et } I \subset]-\infty, \frac{1}{\lambda}[\text{ ou } I \subset]\frac{1}{\lambda}, +\infty[$$

$$b) \quad y(x) = x \quad I \subset \mathbb{R}.$$

$$c) \quad y(x) = -\frac{1}{x} \quad I \subset]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$$

III.3 Equations de Bernoulli

est des équations de la forme

$$(e) \quad A y' + B y + C y^\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} (\alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 1)$$

et A, B, C des fonctions continues.

Méthode de résolution

On pose $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha) \frac{y'}{y^\alpha}$. Alors (e) devient

$$\frac{1}{1-\alpha} A z' + B z + C = 0$$

équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre en z .

On obtient $z(x)$ puis $y(x)$.

Remarque. Pour $\alpha = 2$, poser $z = \frac{1}{y}$ revient à supposer que $y(x) \neq 0 \forall x \in I$. On n'obtiendra que des solutions ne s'annulant en aucun point. D'autres solutions échappent peut-être à cette façon de faire.

Exemple (e) $x y' + y - x y^3 = 0$.

Notons $z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = -2 \frac{y'}{y^3}$ et par suite

$$(e) \Leftrightarrow x z' - 2z + 2x = 0.$$

En supposant $I \subset \mathbb{R}_-^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_+^*$, on se ramène à l'équation linéaire de ordre normalisée

$$(E) \quad z' - \frac{2}{x} z = -2.$$

La solution générale de (E) est $z(x) = 2x + \frac{\lambda}{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}$.

T.V.I $\Rightarrow y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2x + \frac{\lambda}{x^2}}}$
continue sur I
et ne s'annule
pas sur I

$$\lambda = 1 \text{ ou } -1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

III.4 Equations de Riccati

C'est des équations de la forme

$$(e) \quad A y' + B y + C y^2 + D = 0, \quad A, B, C, D \text{ des fonctions continues.}$$

Lorsque $D=0$, on a un cas particulier de l'équation de Bernoulli.

Méthode de résolution

Supposons connue une solution y_0 de (e), et notons

$\gamma = y - y_0$. Alors y solution de (e) si et seulement si

$$A(y_0 + \gamma)' + B(y_0 + \gamma) + C(y_0 + \gamma)^2 + D = 0$$

$$A\gamma' + \underbrace{(B + 2C y_0)}_{(=)} \gamma + C\gamma^2 = 0 \quad \text{Eq. de Bernoulli}$$

On pose donc $z = \frac{1}{\gamma}$ pour se ramener à une équation linéaire en z .

Exemple (E) $y' + 3y + y^2 + 2 = 0$.

Une solution évidente (sur \mathbb{R}) est $x \mapsto -1$.

Posons $\gamma = y + 1$. (E) $\Leftrightarrow \gamma' + \gamma + \gamma^2 = 0$ (F)

On pose $z = \frac{1}{\gamma}$, alors (F) devient

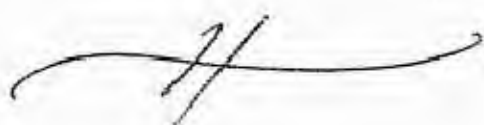
$$-z' + z + 1 = 0 \quad (G)$$

La solution générale (en z) est $z(x) = -1 + \lambda e^x$, d'où

la solution générale de (E) est

$$y(x) = -1 + \frac{1}{-1 + \lambda e^x} = -\frac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$y(x) = -2,$$





ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..